



FACULTAD DE ECONOMÍA, UNAM
SEMINARIO DE CREDIBILIDAD MACROECONÓMICA

Otros artificios

-nueva época-

El modelo de Solow en los libros de texto

Henry Simons y las reglas monetarias

Crecimiento económico y medio ambiente

La medalla Clark 2013

Los cien años de la Fed





El modelo de Solow en los libros de texto

Flor E. Hernández Reyes*

Jenny J. Ibáñez Cruz*

Introducción

La macroeconomía contemporánea es el estudio integrado de las fluctuaciones, de las expectativas y del crecimiento económico por medio de distintas teorías que no necesariamente conllevan las mismas implicaciones de política. Por ejemplo, la teoría keynesiana se enfoca en la estabilización del producto de corto plazo por medio de la política económica, mientras que en la teoría del ciclo económico real las fluctuaciones pueden ser óptimas, aún en modelos de equilibrio general sin imperfecciones, por lo que no habría necesidad de recurrir a las políticas de estabilización. En todo caso, la macroeconomía contemporánea explica que las fluctuaciones ocurren con respecto a una tendencia de crecimiento, por lo que el estudio de los factores que inciden sobre ésta no es menos relevante.¹

De forma similar, existe una diversidad de teorías del crecimiento económico que van, por ejemplo, desde el modelo Harrod-Domar hasta las teorías contemporáneas del crecimiento endógeno. Estas últimas tienen como base analítica al modelo de crecimiento de Solow, que surgió en 1956 como respuesta al primero, eliminando el supuesto de proporciones fijas, estableciendo la convergencia al estado estacionario y enfatizando el papel del progreso tecnológico en el crecimiento. El modelo de Solow, por tal motivo, tiene una gran relevancia actual en el estudio del crecimiento económico pero recibe, como el estudiante de economía puede darse cuenta fácilmente, un tratamiento heterogéneo en los libros de texto.

En beneficio de aquellos estudiantes que quieren profundizar en el estudio del modelo de Solow, el presente artículo compara su tratamiento en los libros de texto más utilizados de los elementos centrales del modelo (el progreso técnico, el aumento de la población, el nivel de capital, la tasa de ahorro, el estado estacionario y la regla de oro), y busca los elementos comunes que sean imprescindibles para su buen entendimiento. El artículo se organiza de la siguiente manera: después de esta introducción se exponen una breve semblanza de Robert Solow, una comparación de cómo es abordado su modelo en distintos libros de macroeconomía, una exposición sintética de sus elementos más importantes y, finalmente, unos comentarios a modo de conclusiones.

I. Breve semblanza de Robert Solow

Brooklyn, Nueva York, vio nacer a Robert Merton Solow el 23 de agosto de 1924. Estudió economía en Harvard, donde en 1951 obtuvo su PhD en Ciencias Económicas con una tesis que modela el cambio en la distribución del ingreso salarial con respecto a las tasas de desempleo. Con este trabajo obtuvo el Premio David A. Wells, que Harvard otorga a las mejores tesis en economía. Desde 1950 ya se había integrado al

* Las autoras son miembros del Seminario de Credibilidad Macroeconómica, FE-UNAM. Correspondencia: ibanezeconomia@gmail.com.

¹ Para una reflexión sobre estos temas ver De Gregorio (2007).

Departamento de Economía del Massachusetts Institute of Technology (MIT), donde trabajó al lado de Paul Samuelson (Premio Nobel de Economía en 1970 por el desarrollo de la teoría económica estática y dinámica y sus contribuciones para elevar el nivel del análisis en la ciencia económica), tanto por ensayos elaborados en conjunto, como por la ubicación de sus oficinas en el MIT. Actualmente Solow es profesor emérito de dicha institución.

En 1987 obtuvo el Premio Nobel de Economía por sus contribuciones a la teoría del crecimiento económico expuesta en su artículo “A Contribution to the Theory of Economic Growth”, publicado en febrero de 1956 por la revista *Quarterly Journal of Economics*. El modelo allí presentado otorga un papel determinante al progreso tecnológico al hacer explícita la diferencia entre el crecimiento intensivo (o crecimiento de los niveles de vida) y el crecimiento extensivo (dado por el crecimiento de la población). No obstante, Solow lo trata de forma exógena, cuestión que más adelante estudian y resuelven los modelos de crecimiento endógeno, como el de Robert Lucas (Premio Nobel de Economía en 1995 por sus trabajos sobre la hipótesis de las expectativas racionales y la neutralidad monetaria), o el de Paul Romer (profesor de economía en la Escuela de Negocios Leonard N. Stern de la Universidad de Nueva York).

Además, Solow se ha interesado por otros temas de economía, como las diferencias internacionales en el desempeño de ciertas industrias -cuestión que abordó en estudios para el McKinsey Global Institute- o la teoría económica de los recursos naturales, que motivara su conferencia Richard T. Ely en 1974 o su participación en un panel de expertos, junto con Kenneth Arrow (Premio Nobel de Economía en 1972 por sus contribuciones pioneras a la teoría del equilibrio económico general y la teoría del bienestar), organizado por la National Oceanic and Atmospheric Administration para evaluar metodologías para la valoración ambiental. Dentro de sus actividades no académicas destaca el haber sido miembro del Consejo de Asesores Económicos del presidente John F. Kennedy de 1961 a 1963. Ha sido reconocido con el doctorado *honoris causa* por diversas universidades como la de Chicago en 1967, por el William College en 1974 y por las universidades de Lehigh, Brown, Wesleyan, París, Warwick y Yale, en distintos años.

Hoy en día, después de más de medio siglo de la publicación del modelo, y con sus casi nueve décadas de vida, Solow sigue estando académicamente activo, tanto como profesor emérito en el MIT, como por sus artículos, entrevistas y ensayos en diversos periódicos y revistas, como en *The New York Times*, *New York Review of Books* y *The New Republic*. Robert Solow ha sido un hombre preocupado porque las personas entiendan economía y con un peculiar sentido del humor. James Tobin (Premio Nobel de Economía en 1981 por su análisis de los mercados financieros y sus relaciones con las decisiones de gasto, empleo, producción y precios) alguna vez dijo, refiriéndose a él, que “es uno de los raros economistas en el mundo que puede escribir un buen inglés, es decir, un inglés agradable de leer, incluso sobre temas técnicos” (Roux, 2006). Es un hombre al que le gusta dedicarle tiempo a la enseñanza, como alguna vez lo mencionó: “considero que, si hubiese desatendido a mis estudiantes, habría podido escribir un 25 por 100 más de artículos. La elección era fácil, y no me arrepiento” (Roux, 2006).



II. La versión “libro de texto”

Los libros de texto de macroeconomía atestiguan inequívocamente la importancia del modelo de Solow, esto puede ejemplificarse con una selección de aquellos elaborados por economistas de reconocimiento internacional. La gran mayoría de los autores que elegimos para el ejercicio de esta sección son parte del corriente nuevo keynesiana, exceptuando a Robert Barro que se ubica en la corriente de los nuevos clásicos. Además, estos libros son de los más utilizados por los estudiantes de economía a nivel internacional. El Cuadro 1 muestra los libros seleccionados, sus autores, y su adscripción actual. Como se puede ver, el abanico de autores es de nacionalidad diversa (de Estados Unidos, Francia, Alemania, Israel, Italia, España y Chile) y se han desempeñado como profesores en universidades, ministros de finanzas o como directores de diversas instituciones.

Cuadro 1. Libros de texto seleccionados

Título	Edición (año)	Autores (nacionalidad)	Adscripción
<i>Macroeconomía</i>	Sexta (2007)	Gregory Mankiw (Estados Unidos)	Profesor en la Universidad de Harvard
<i>Macroeconomía</i>	Cuarta (2006)	Olivier Blanchard (Francia-Estados Unidos)	Director del Departamento de Estudios del Fondo Monetario Internacional
<i>Macroeconomía</i>	Décima (2008)	Rudiger Dornbusch (Alemania-Estados Unidos) ¹	Profesor en las Universidades de Rochester, Chicago y en el MIT
		Stanley Fischer (Israel-Estados Unidos)	Director del Banco de Israel
		Richard Startz (Estados Unidos)	Profesor en la Universidad de Washington
<i>Macroeconomía. Teoría y política</i>	Segunda (2002)	Robert Barro (Estados Unidos)	Profesor en la Universidad de Harvard
		Vittorio Grilli (Italia)	Ministro de Finanzas en Italia
		Ramón Febrero (España)	Profesor en la Universidad Complutense
<i>Macroeconomía en la economía global</i>	Segunda (2004)	Jeffrey Sachs (Estados Unidos)	Director del Earth Institute y del Proyecto del Milenio de las Naciones Unidas
		Felipe Larraín (Chile)	Ministro de Hacienda en Chile

^{1/}Rudiger Dornbusch falleció en julio de 2002. Ésta fue su última adscripción.

Fuente: elaboración propia.

El Cuadro 2 compara estos libros tomando en cuenta las diferencias en los capítulos que destinan al modelo de Solow, en el número de páginas, en el porcentaje que esto representa sobre el total del libro, en el número de gráficas, cuadros explicativos, ejercicios y en si contiene algún tipo de evidencia empírica. Se puede observar que los libros de texto que mayor espacio dedican al modelo de Solow son el de *Macroeconomía* de Gregory Mankiw, seguido por el de *Macroeconomía* de Olivier Blanchard, los cuales le destinan un 10.33% y un 10.24% del total de sus páginas, respectivamente. Por debajo de estos resultados se encuentran el libro *Macroeconomía* de Rudiger Dornbusch, Stanley Fischer y Richard Startz, que destina un 7.17%, el libro de Jeffrey Sachs y Felipe Larraín, con un 4.10%, y el libro de Robert Barro, Vittorio Grilli y Ramón Febrero, que destina el 3.91%. Los libros que mejores elementos presentan para un análisis gráfico son el de Blanchard y, en segundo término, el escrito por Mankiw. Estas características saltan a la vista con sólo abrirlos.

**Cuadro 2. Modelo de Solow: composición técnica de los libros de texto**

Libro	Capítulos destinados	Número de páginas destinadas	Porcentaje sobre el total de páginas del libro	Número de gráficas presentadas	Cuadros explicativos	Ejercicios	Evidencia empírica
Mankiw (2007)	Parte III : capítulos 7 y 8	86	10.33	14	6	Sí	Sí
Blanchard (2006)	Parte IV: capítulos 10, 11 y 12	72	10.24	25	14	Sí	Sí
Dornbusch-Fischer-Startz (2008)	Parte II: capítulos 3 y 4	45	7.17	12	2	Sí	Sí
Sachs-Larraín (2004)	Parte II: capítulo 4	31	4.1	9	7	Sí	Sí
Barro-Grilli-Febrero (2002)	Capítulo 15	22	3.91	11	7	Sí	Sí

Fuente: elaboración propia.

El Cuadro 3 presenta cuatro elementos y su tratamiento en los libros de texto. El primero, el modelo básico, consta de seis temas fundamentales:

1. función de producción en forma *per cápita*,
2. dinámica del capital,
3. crecimiento de la población,
4. progreso tecnológico,
5. estado estacionario, y
6. rendimientos constantes a escala.

Asignamos una calificación máxima de seis a los libros que cumplen con todas las características ya mencionadas. La mayoría de los libros obtienen la máxima calificación, con la excepción del libro de Jeffrey Sachs y Felipe Larraín *Macroeconomía en la economía global*, el cual se encuentra con una calificación de cinco, por omitir el supuesto de los rendimientos constantes a escala. Si un estudiante sólo leyera este libro, no podría entender por qué aumentos proporcionales en el capital y en el empleo incrementan de manera proporcional al producto.

Cuadro 3. Elementos del modelo de Solow en los libros de texto

Elementos	Mankiw	Blanchard	Dornbusch-Fischer-Startz	Sachs-Larraín	Barro
Modelo Básico	6	6	6	5	6
Implicaciones de política económica: regla de oro	✓	✓	✓	X	X
Cuestiones técnicas: contabilidad del crecimiento, residuo de Solow	✓	✓	✓	✓	✓
Elementos adicionales: ampliaciones del modelo y críticas del modelo (crecimiento endógeno)	✓	✓	✓	✓	✓

Fuente: elaboración propia.

El segundo elemento que se tomó en cuenta fue si el libro trata o no sobre las implicaciones de la política económica, basándose en la regla de oro. De nueva cuenta, el de Sachs y Larraín no presentaron este aspecto, mientras que el resto de los libros sí cumplen con este requisito. El tercer elemento se refiere a cuestiones técnicas como la contabilidad del crecimiento y el residual de Solow. En este punto no hubo gran problema, ya que todos los libros cumplen con este requisito.



Finalmente se tomó en cuenta si al análisis del modelo se agregan otros elementos, como alguna crítica, o la explicación del modelo de crecimiento endógeno. En este aspecto, todos los libros tienen estos puntos.

Con el análisis previo se pudo ver cuáles son los libros que tienen, al menos, lo más básico para que un estudiante pueda entender el modelo de Solow. Algunos de ellos le dedican más espacio para explicar este modelo, lo que puede sugerir que tiene una explicación más amplia o con más ejercicios y ejemplos para facilitar el estudio, aunque cada uno se enfoca hacia diferentes aspectos y le destina más espacio a puntos en específico. De nuestro ejercicio obtenemos que los libros de *Macroeconomía* de Gregory Mankiw y *Macroeconomía* de Olivier Blanchard contienen la explicación más amplia del modelo, cubren todos los elementos del mismo y contienen unas exposiciones didácticas.

III. Versión sintética del modelo

Tomando en cuenta los distintos aspectos relevantes de cada uno de los libros de texto analizados se formó una versión sintética que puede servir como punto de partida y referencia para quienes buscan introducirse a este tema. El modelo de Solow nos ayuda a comprender la diferencia entre el crecimiento extensivo y el intensivo. El primero se refiere al incremento del producto interno bruto (PIB) de manera similar al incremento en la población, por lo que no hay una variación en el ingreso *per cápita*. En contraste, el segundo se genera cuando el crecimiento del PIB es superior al de la población, por lo que habrá un incremento del nivel de vida. El ahorro, el crecimiento de la población y el progreso técnico interactúan en el modelo de Solow y explican el nivel de producción de una economía así como su crecimiento con el paso del tiempo. En este modelo se utilizan variables *per cápita* para capturar mejor las diferencias entre países ricos y pobres, y se representan con letras minúsculas.

El modelo representa el proceso productivo a través de una función que combina los factores capital y trabajo que son necesarios para dado un nivel de producto. En este modelo esta función exhibe rendimientos constantes a escala, es decir, que al duplicar la cantidad de trabajo y capital también se duplica la producción.

En particular, la función se puede escribir como:

$$Y/L = F(K/L, L/L) \quad (1)$$

Si definimos las variables $y = Y/L$ como la producción por trabajador y $k = K/L$ como el capital por trabajador, llegamos a $y = f(k)$, que es la función de producción en su forma intensiva. De manera similar podemos escribir la ecuación de demanda agregada como $y = c + i$, donde c es el consumo por trabajador, e i es la inversión por trabajador. Dado que el producto se agota entre consumo o inversión, ocurre que siempre hay equivalencia entre el ahorro, sy , donde s representa la tasa de ahorro determinada exógenamente, y la inversión, i . Ya que en el modelo las variables se definen en su forma intensiva, se debe incorporar la dinámica de la población, representada como una tasa η tal que $\Delta L/L = \eta$.

La característica principal de este modelo es la determinación de la dinámica del capital. Dado un acervo de capital inicial, si se conoce esta dinámica se puede conocer la distribución del producto en cualquier momento del tiempo. Si el capital se deprecia a una tasa δ y la población crece a una tasa η , entonces la



variación del acervo de capital se determina por la diferencia entre la inversión total y la que sería necesaria para mantener constante el capital por trabajador, dadas la depreciación y la tasa de crecimiento poblacional. Formalmente,

$$\Delta k = sf(k) - (\delta + \eta)k \quad (2)$$

En el estado estacionario ocurre que $\Delta k = 0$, por lo que

$$sf(k) = (\delta + \eta)k \quad (3)$$

El progreso técnico se incorpora mediante la productividad del trabajo representada por EL y la función de producción se reescribe como $Y = F(K, EL)$. La eficiencia del trabajo, capturada por la variable E , crece a una tasa constante g . La función de producción $Y = F(K, EL)$ se asume con rendimientos constantes a escala, por lo que se puede proceder de forma análoga a la anterior. Las variables y , k , c , e i ahora están definidas por trabajador efectivo. Una vez teniendo considerados todos los elementos del modelo de Solow, la ecuación fundamental queda:

$$\Delta k = sf(k) - (\delta + \eta + g)k \quad (4)$$

Esta ecuación de dinámica implica que el estado estacionario es un equilibrio estable: si la inversión $sf(k)$ es mayor al acervo de capital necesario para cubrir la depreciación y para mantener constante la relación capital trabajo efectivo, entonces el nivel de capital aumenta. Por el contrario, si el primer monto es menor al segundo el nivel de capital disminuye. Esta convergencia asegura que si el acervo de capital no es el del estado estacionario ocurrirán ajustes que paulatinamente lo llevarán a él.

Los encargados de realizar política económica pueden elegir una tasa de ahorro para que el consumo, encontrándose en un estado estacionario, alcance su máximo valor. El nivel de capital en el que se realice este consumo máximo se conoce como el de “la regla de oro”. Para encontrar este nivel máximo se resuelve el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } c = y - i \quad (5)$$

$$\text{sujeto a } sf(k) = (\delta + \eta + g)k$$

Hay que notar, primero, que se asume que el producto se agota entre consumo e inversión y, segundo, que el consumo máximo debe asociarse a un estado estacionario, razón que explica la restricción del problema. El problema se puede reescribir como

$$\text{Maximizar } c = f(k) - (\delta + \eta + g)k \quad (6)$$

cuya condición de primer orden es

$$\frac{\partial c}{\partial k} = f'(k^*) - (\delta + \eta + g) = 0$$



de donde obtenemos que el producto que se añade cuando se agrega una unidad de k debe ser igual a $(\delta + \eta + g)$. El valor k^* expresa el acervo de capital de la regla de oro. Ahora se utilizará este nivel de capital para encontrar el máximo consumo, quedando como $c^* = f(k^*) - (\delta + \eta + g)k^*$. Dado que el producto se distribuye entre consumo e inversión $y = c + i$ tenemos que

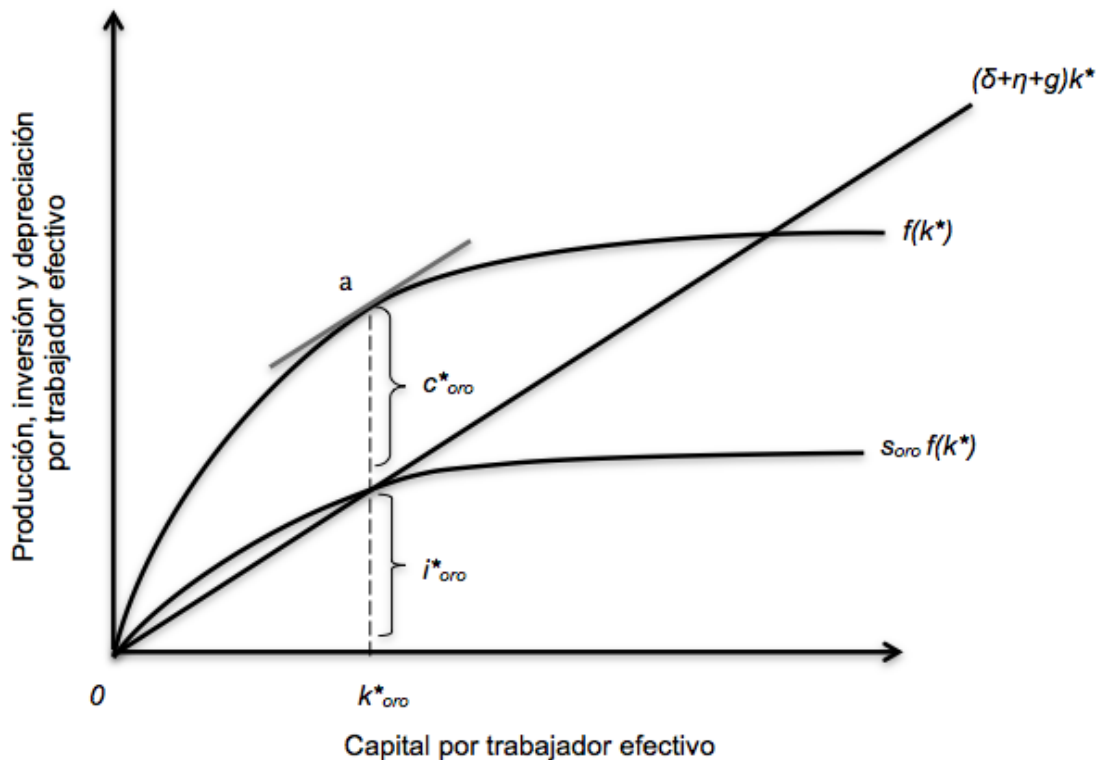
$$f(k^*) = c^* + sf(k^*).$$

Reordenando esta última expresión, obtenemos

$$s^* = 1 - \frac{c^*}{f(k^*)} \quad (7)$$

que representa la tasa de ahorro que maximiza el consumo.

Gráfica 1. Regla de oro y estado estacionario



Fuente: elaboración propia

La Gráfica 1 contiene todos los elementos del modelo: la función de producción, la tasa de ahorro y la depreciación junto con la relación capital-trabajo efectivo. El estado estacionario ocurre cuando la inversión se iguala con al acervo de capital necesario para cubrir la depreciación y para mantener constante la relación capital-trabajo efectivo, lo que se ve reflejado en la intersección de la curva $sf(k^*)$ con la recta $(\delta + n + g)k^*$. El consumo se maximiza cuando la pendiente de $(\delta + n + g)k^*$ se iguala con la de la tangente de la curva de $f(k^*)$, y representa el nivel de capital del estado estacionario de la regla de oro, k^*_{oro} , y que no es otra cosa que la condición de primer orden del problema de maximización visto anteriormente.

El siguiente cuadro se realizó con algunos elementos tomados de Mankiw (2007) para comparar el modelo de Solow en tres etapas: la primera incluyendo sólo la depreciación, la segunda agregando el crecimiento poblacional, y la tercera añadiendo el progreso técnico. El cuadro expone lo que sucede con la dinámica del acervo de capital, la inversión, la variación del producto *per cápita* y del producto total en el estado estacionario en cada una de las etapas.

Cuadro 4. Comparación del modelo de Solow en tres etapas

Variable	Etapas 1: depreciación	Etapas 2: depreciación y crecimiento poblacional	Etapas 3: depreciación, crecimiento poblacional y progreso técnico
Δk	0	0	0
sy	δk	$(\delta + \eta)k$	$(\delta + \eta + g)k$
$\Delta y/y$	0	0	0
$\Delta Y/Y$	0	η	$\eta + g$
Tipo de crecimiento	No hay	Extensivo	Intensivo

Fuente: elaboración propia con base en Mankiw, 2007.

En la primer etapa, que toma en cuenta sólo la depreciación, el estado estacionario requiere equivalencia entre la inversión y la depreciación del capital, y la variación en la producción total es igual a cero, por lo que no hay crecimiento. En la segunda etapa, cuando se toma en cuenta el crecimiento de la población, el estado estacionario requiere que la inversión sea igual a la depreciación del capital más la tasa de crecimiento poblacional, por lo que la variación de la producción total es igual a la tasa de crecimiento de la población y el tipo de crecimiento obtenido es extensivo. Finalmente, al incluir todos los elementos al modelo, en el estado estacionario se requiere equivalencia entre la inversión y el acervo de capital necesario para cubrir la depreciación y para mantener constante la relación capital trabajo efectivo, por lo que la variación de la producción total es igual a la suma de la tasa de crecimiento de la población y del progreso técnico, y el tipo de crecimiento será intensivo.

A modo de conclusiones

La macroeconomía, como el estudio de las fluctuaciones, de las expectativas y del crecimiento, contiene diversas teorías. Dentro de la teoría del crecimiento se encuentra el modelo de Solow, que es uno de los más relevantes para entender la interacción de los factores que inciden en el crecimiento y constituye, por tanto, un modelo base en la enseñanza superior de economía. En este artículo se presenta un recorrido por



distintos tratamientos del modelo de Solow expuestos en los libros de texto más importantes para identificar los elementos básicos de su enseñanza. El ejercicio aquí reportado corrobora que cada libro de texto brinda un tratamiento diferenciado, poniendo énfasis en diversos elementos del modelo. Según los criterios que se tomaron en cuenta, podemos decir que los más completos y mejor explicados al abordar el tema son *Macroeconomía* de Gregory Mankiw y *Macroeconomía* de Olivier Blanchard.

El artículo expone una versión sintética del modelo que puede servir como una primera aproximación. Se expuso cómo interactúan diferentes variables (la población, el ahorro, el progreso tecnológico) en la determinación de la dinámica del capital. También se realizó una comparación del modelo en tres etapas, iniciando sólo con la depreciación, posteriormente introduciendo el crecimiento de la población y el progreso tecnológico, en la segunda y tercer etapa respectivamente, con el fin de ir haciendo cada vez más completo el modelo, y así a su vez poder identificar la diferencia entre el crecimiento intensivo y extensivo. También se expuso el proceso de elección de la tasa de ahorro que maximiza el consumo, situación conocida como “regla de oro”, y la condición que el acervo de capital debe observar para tal efecto.

Sin duda, Solow ha sido y seguirá siendo uno de los economistas contemporáneos más importantes. Revolucionó la teoría del crecimiento económico y sus contribuciones han servido como punto de partida para el desarrollo de teorías para entender el funcionamiento del sistema económico actual. Por lo tanto, estudiar su modelo es tarea fundamental para todo estudiante de economía. ●●

Referencias

Barro, Robert, Vittorio Grilli y Ramón Febrero (2002)/ *Macroeconomía. Teoría y política*, Editorial McGraw- Hill, Madrid. Segunda edición.

Blanchard, Olivier (2006)/ *Macroeconomía*, Editorial Pearson/ Prentice Hall, Madrid. Cuarta edición.

De Gregorio, José (2007)/ *Macroeconomía. Teoría y política*, Editorial Pearson/ Prentice Hall, México. Primera edición.

Dornbusch, Rudiger, Stanley Fischer y Richard Startz (2008)/ *Macroeconomía*, Editorial McGraw-Hill, México. Décima edición.

Mankiw, Gregory (2007)/ *Macroeconomía*, Antoni Bosch Editor, Barcelona. Sexta edición.

Real Academia Sueca de Ciencias (1987)/ “ThePrize in Economics 1987”, PressRelease, <http://www.nobelprize.org>. (Último acceso: abril 19 de 2013.)

Roux, Dominique (2006)/ *Los premios Nobel de Economía*, Editorial Akal, Madrid. Primera edición.

Sachs, Jeffrey y Felipe Larraín (2004)/ *Macroeconomía en la economía global*, Editorial Pearson/ Prentice Hall, Buenos Aires. Segunda edición.